NO DATE 22/05/17

(Συνεχεια ασκησης 7)

γ) $\int \sin(15x)\cos(7x)dx =$

$= \int \frac{1}{2}(\sin(15x+7x)+\sin(15x-7x)\,dx)$

$= \frac{1}{2}\int \sin(22x)+\sin(8x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(22x)}{22}-\frac{\cos(8x)}{8}\right)$

$2\sin\alpha\cdot\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

Ασκηση 8)

$I = \int \frac{\log x}{x}dx = \int (\log x)'\log x\,dx$
$= (\log x)(\log x) - \int \log x \frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow 2I = (\log x)^2\ (+C)$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}(\log x)^2\ (+C)$ ή αλ

$I = \int \frac{\log x}{x}dx$

Θετουμε $y=\log x$ τοτε $x=e^y$ και $dx = e^y dy$. Αναλογιστε στο

$I' = \int \frac{y}{e^y}\cdot e^y dy = \frac{1}{2}y^2 + C$

Συνεπως $I = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$.

NO DATE

Άσκηση 9) α) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2-16}\,dx$.

$$\frac{1}{x^2-16} = \frac{1}{(x-4)(x+4)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+4}$$

$$= \frac{Ax+4A+Bx-4B}{(x-4)(x+4)}$$

$$= \frac{(A+B)x+(4A-4B)}{(x-4)(x+4)}$$

Άρα $\begin{cases} A+B=0 \\ 4A-4B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ 8A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{8} \\ A=\frac{1}{8} \end{cases}$

$$I = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} \frac{1}{x-4}\,dx - \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} \frac{1}{x+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\Big[\log(4-x)\Big]_{x=-2}^{x=2} - \frac{1}{8}\Big[\log(x+4)\Big]_{x=-2}^{x=2}$$

$$= \frac{1}{8}(\log 2 - \log 6) - \frac{1}{8}(\log 6 - \log 2)$$

$$= \frac{1}{4}(\log 2 - \log 6) = -\frac{1}{4}\log 3.$$

NO DATE

B) $\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{3x^2+1}{x^3-x^2+x-1}dx =$

$x^3-x^2+x-1 = x^2(x-1)+(x-1) = (x-1)(x^2+1)$

$\frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1} = \frac{(Ax^2+A)+(Bx^2+\Gamma x-Bx-\Gamma)}{(x-1)(x^2+1)}$

$= \frac{(A+B)x^2+(\Gamma-B)x+(A-\Gamma)}{(x-1)(x^2+1)}$

Άρα: $\begin{cases} A+B=3 \\ \Gamma-B=0 \\ A-\Gamma=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=\Gamma \\ A+B=3 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \\ \Gamma=1 \end{cases}$

Έτσι: $I = \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} 2\cdot\frac{1}{(x-1)} + \frac{x+1}{x^2+1}dx$

$= \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}dx$

$= \left[2\log(1-x) + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \arctan x\right]_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$= 2\log\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right) + \underbrace{\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}}_{=\frac{\pi}{6}} - \left(2\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 + \underbrace{\arctan(-1)}_{=\frac{\pi}{4}}\right)$

NO DATE

Άσκηση 10)

α) $I = \int e^{\sqrt{x}} dx$.

Θέτουμε $y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow dx = 2y\,dy$.

Αναγόμαστε στο $I' = \int e^y 2y\,dy = \int (e^y)' 2y\,dy$

$= 2y \cdot e^y - \int 2e^y dy = 2y \cdot e^y - 2e^y + c$.

Άρα:

$I = 2\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$.

~o~o~o~o~o~o~o~

β) $I = \int \frac{1}{1+e^x} dx = \int 1 - \frac{e^x}{1+e^x} dx = x - \log(1+e^x) + c$.

<u>**Β' τρόπος**</u>

$y = e^x$ κ.τ.λ.

~o~o~o~o~o~o~o~o~

γ) $I = \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$.

Θέτοντας $y = \sqrt[6]{x}$, έχουμε $\sqrt{x} = y^3$

$\sqrt[3]{x} = y^2$.

$x = y^6 \Rightarrow dx = 6y^5 dy$

Αναγόμαστε στο $I' = \int \frac{1}{y^3 + y^2} 6y^5 dy$

$= \int \frac{6y^3}{y+1} dy$

Θέτουμε $\omega = y+1$, τότε $d\omega = dy$. Αναγόμαστε στο

$I'' = \int \frac{6\omega^3 - 3\omega^2 + 3\omega - 1}{\omega} d\omega$.

$= \int 6\omega^2 - 18\omega + 18 - \frac{6}{\omega} d\omega$

$= 2\omega^3 - 9\omega^2 + 18\omega - 6\log(\omega) + c$

NO DATE

Άρα $I = 2(\sqrt[6]{x}+1)^3 - 9(\sqrt[6]{x}+1)^2 + 18(\sqrt[6]{x}+1) - 6\log(\sqrt[6]{x}+1) + C$

Άσκηση 11)

i) $I = \int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx$

$= x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x dx$

$= x^2 \cdot e^x - \int 2x (e^x)' dx$

$= x^2 e^x - (2x \cdot e^x - \int 2e^x dx)$

$= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C$

ii) $I = \int \sqrt{x} \log x \, dx$

Θέτουμε $y = \sqrt{x}$

$x = y^2$

$dx = 2y\,dy$

Ανάγεται στο: $I' = \int y \log(y^2) 2y\,dy$

$= 4\int y^2 \log(y)\,dy$

$= 4\int \left(\frac{y^3}{3}\right)' \log y\,dy$

$= 4\left(\frac{y^3}{3}\log y - \int \frac{y^3}{3} \cdot \frac{1}{y} dy\right)$

$= \frac{4}{3} y^3 \log y - \frac{4}{3}\int y^2 dy$

$= \frac{4}{3} y^3 \log y - \frac{4}{9} y^3 + C$

Άρα $I = \frac{4}{3} x^{3/2} \cdot \log x^{1/2} - \frac{4}{9} x^{3/2} + C$

$= \frac{2}{3} x^{3/2} \log x - \frac{4}{9} x^{3/2} + C.$

iii) $I = \int \cos(\log x)\,dx$. Θέτουμε $y = \log x$

Τότε $x = e^y$ άρα $dx = e^y dy$

Έτσι αναγόμαστε στο $I' = \int \cos(y) e^y dy$

$= \int \cos(y) \cdot (e^y)' dy$

$= e^y \cos y - \int e^y(-\sin y) dy$

$= e^y \cos y + \int e^y \sin y\, dy$

$= e^y \cos y + \int (e^y)' \sin y\, dy$

$= e^y \cos y + e^y \sin y - \underbrace{\int e^y \cos y\, dy}_{I'}$

$I' = \frac{1}{2}(e^y \cos y + e^y \sin y) + C.$

Άρα $I = \frac{1}{2}(x \cos(\log x) + x \sin(\log x)) + C.$

iv) $I = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$

$x = \sin y$ (δηλ. $y = \arcsin x$)

Τότε $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{\cos^2 y} = |\cos y| = \cos y.$

$dx = \cos y\, dy.$

NO DATE

Αναγόμαστε $I' = \int \frac{1}{\sin y \cancel{\cos y}} \cancel{\cos y}\, dy$

$$= \int \frac{1}{\sin y} dy$$

$$= \int \frac{\sin y}{1-\cos^2 y} dy$$

Θέτουμε $\omega = \cos y$

$d\omega = -\sin y dy$

Αναγόμαστε στο $I'' = \int \frac{1}{\omega^2 - 1} d\omega =$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{\omega - 1} - \frac{1/2}{\omega + 1} d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\log(1-\omega) - \frac{1}{2}\log(1+\omega) + C$$

Άρα $I' = \frac{1}{2}\log(1-\cos y) - \frac{1}{2}\log(1+\cos y) + C$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos y}{1+\cos y}\right) + C$$

$$I = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + C\right)$$

NO DATE

Ασκήσεις 4ου φυλλαδίου

1) Taylor τάξης 3 γύρω από το 0 της $f(x)=e^{\sin x}$.

Απόδ.

Το ζητούμενο πολ/μο είναι το

$$T_{3,f,0}(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

$f(x)= e^{\sin x}$

$f'(x) = e^{\sin x}\cos x$

$f''(x) = e^{\sin x}\cos^2 x - e^{\sin x}\sin x$

$f'''(x) = e^{\sin x}\cos^3 x + e^{\sin x}(2\cos x(-\sin x)) -$

$- e^{\sin x}\cos x\sin x - e^{\sin x}\cos x$

$= e^{\sin x}\cos^3 x - 3e^{\sin x}\cos x\sin x - e^{\sin x}\cos x.$

Άρα $f(0)=1$

$f'(0)=1$

$f''(0)=1$

$f'''(0)=1-0-1=0.$

Άρα $T_{3,f,0}(x)= 1+x+\frac{1}{2}x^2.$

2) $I=\int_0^{+\infty} te^{-t}dt.$

Υπολογίζω πρώτα το αόριστο:

$J=\int te^{-t}dt=\int t(-e^{-t})'dt=-te^{-t}-\int 1(-e^{-t})dt$

$=-te^{-t}-e^{-t}\ (+C)$

NO DATE

Άρα $I = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t \cdot e^{-t} dt =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[-t \cdot e^{-t} - e^{-t} \right]_{t=0}^{t=x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left((-x \cdot e^{-x} - e^{-x}) - (0,1) \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} \right) = 1$$

- Το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int t^2 e^{-t} dt = \int t^2 (-e^{-t})' dt =$$

$$= -t^2 \cdot e^{-t} - \int 2t(-e^{-t}) dt$$

$$= -t^2 \cdot e^{-t} + 2 \int t e^{-t} dt$$

$$= -t^2 \cdot e^{-t} + 2(-t \cdot e^{-t} - e^{-t}) \ (+c)$$

$$= -t^2 e^{-t} - 2t \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-t} \ (+c)$$

$$I = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^2 \cdot e^{-t} dt = \lim_{x \to +\infty} \left[-t^2 \cdot e^{-t} - 2t \cdot e^{-t} - 2e^{-t} \right]_{t=0}^{t=x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\left(-\frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e^x} - \frac{2}{e^x} \right) - (0+0-2) \right]$$

$$= 2$$

NO DATE

3) $f, g : [a,\beta] \to \mathbb{R}$: $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta g(x)dx$

συνεχής. Νδο: $\exists\, x_0 \in [a,\beta]$ ώστε $f(x) = g(x)$.

(*) Υπενθύμιση: ΘΜΤ του Ολ. Λογ.

Αν $f : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $g : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ ολοκ.

$\exists\, x_0 \in [a,\beta]$: $\int_a^\beta f(x)g(x)dx = f(x_0)\int_a^\beta g(x)dx$.

α' τρόπος

Λύση

Θέτουμε $h(x) = f(x) - g(x)$ συνεχής.

Έχουμε $\int_a^\beta h(x)dx = 0$.

Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ του Ολ. Λογ. έχουμε

ότι $\exists\, x_0 \in [a,\beta]$: $\int_a^\beta h(x) \cdot 1 dx = h(x_0)\int_a^\beta 1 \cdot dx$

$$\Rightarrow 0 = h(x_0)(\beta - a)$$
$$\Rightarrow h(x_0) = 0$$
$$\Rightarrow f(x_0) = g(x_0)$$

β' τρόπος

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο)

ότι $f(x) \neq g(x)$, $\forall x \in [a,\beta]$. Τότε για την

συνεχή $h : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - g(x)$ **και**

$\int_a^\beta h(x) = 0$, έχουμε $h(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,\beta]$.

Άρα είτε α) $h(x) > 0$, $\forall x \in [a,\beta]$

β) $h(x) < 0$, $\forall x \in [a,\beta]$

NO DATE

α) Η h παίρνει ελάχιστη τιμή στο $[\alpha,\beta]$ δηλ. $\exists\, \xi \in [\alpha,\beta] : h(x) \geq h(\xi) > 0$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$

άρα $\int_\alpha^\beta h(x)dx \geq \int_\alpha^\beta h(\xi)dx = h(\xi)(\beta-\alpha) > 0$, άτοπο.

β) Η h παίρνει μέγιστη τιμή δηλαδή $\exists\, \xi \in [\alpha,\beta] : h(x) \leq h(\xi) < 0$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$

Άρα $\int_\alpha^\beta h(x)dx \leq h(\xi)(\beta-\alpha) < 0$, άτοπο.

Άρα $\exists\, x \in [\alpha,\beta]$ ώστε $f(x) = g(x)$

4) $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $\int_\alpha^\beta f(x)dx \neq 0$

Να δ.ο: $\exists\, \xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε:

$$\int_\alpha^\xi f(x)dx = \int_\xi^\beta f(x)dx.$$

Λύση

Ορίζουμε $g:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ με $g(y) = \int_\alpha^y f(x)dx - \int_y^\beta f(x)dx$

$$\Rightarrow g(y) = \int_\alpha^y f(x)dx - \left(\int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^y f(x)dx\right)$$

$$= 2\int_\alpha^y f(x)dx - \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Η g είναι συνεχής.

* από γνωστό θεώρημα όταν η f είναι ολοκληρ., το αόριστο ολοκλήρωμα της f δηλαδή η συνάρτηση $F(y) = \int_a^y f(x)dx$ είναι συνεχής

$$\left.\begin{aligned} g(a) &= -\int_0^\beta f(x)dx \\ g(\beta) &= \int_0^\beta f(x)dx \end{aligned}\right\}$$

Άρα: $g(a) \cdot g(\beta) < 0$, αφού από εκφώνηση $\int_0^\beta f(x)dx \neq 0$.

Επομένως από Θ. Bolzano :

Άσκηση 5) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Νδο: $\exists\, \xi \in [0,1] : \int_0^1 x^4 f(x)dx = \frac{f(\xi)}{5}$

<u>Λύση</u>

Από το ΘΜΤ του ολ. λογ. $\exists\, \xi \in [0,1]$:

$$\int_0^1 x^4 f(x)dx = f(\xi)\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} f(\xi)$$

NO DATE

Άσκηση 6) → Θέμα Σεπτέμβριος 2016.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,dt$.

α) f παραγ. ; $f'=$; με βάση ποιο θεωρ.

β) f ομ. συνεχής; Η f' είναι ομ. συν.;

γ) πολ/μο Taylor τάξης 5 της f γύρω από το 0.

<u>Απόδ</u>

α) Εφόσον η συνάρτηση $\cos(t^2)$, $t\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής από το 1ο θεμελ. θεώρημα του απειροστικού λογισμού, η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\cos(x^2)$

β) Εφόσον το π.ο. της f είναι διάστημα και η f είναι παραγωγίσιμη με
$f'(x)=\cos(x^2)$ άρα $|f'(x)|\leq 1$
δηλαδή η f έχει φραγμένη παράγωγο
$\Rightarrow$ η f ομ. συνεχής.

Θα δ.ο. η f' δεν είναι ομ. συνεχής.
Αρκεί να βρω 2 ακολουθίες $(x_n),(y_n)$
με $x_n-y_n\to 0$
και $f'(x_n)-f'(y_n)\not\to 0$.

NO DATE

Θέτουμε $x_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$

$y_n = \sqrt{2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$

$f'(x_n) - f'(y_n) = \cos(x_n^2) - \cos(y_n^2)$

$= \cos(2n\pi + \pi/2) - \cos(2n\pi) = 0 - 1 = -1 \not\to 0$

$x_n - y_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2n\pi}$

$$= \frac{(2n\pi + \pi/2) - (2n\pi)}{\sqrt{2n\pi + \pi/2} + \sqrt{2n\pi}} \to 0$$

Άρα η f' δεν είναι ομ. συνεχής